***ПРАВИЛА ЗА ПРЕСМЕТУВАЊЕ ИЗВОД***

***Извод од збир, производ и количник***

|  |
| --- |
| Ако секоја од функциите $u$ и $v$ има извод во точката $x$,тогаш функцијата $Cu (C=const)$ и збирот, разликата, производот и количникот на функциите $u$ и $v$ (во случајот на количник треба да се претпостави дека $v(x)\ne 0$), исто така, имаат извод во точката $x$ и при тоа важат формулите:$$\left[Cu\left(x\right)\right]^{'}=Cu^{'}\left(x\right), C=const$$$$\left[u\left(x\right)\pm v\left(x\right)\right]^{'}=u^{'}\left(x\right)\pm v^{'}\left(x\right)$$$$\left[u\left(x\right)∙v\left(x\right)\right]^{'}=u^{'}\left(x\right)∙v\left(x\right)+u\left(x\right)∙v^{'}\left(x\right)$$$$\left[\frac{u\left(x\right)}{v\left(x\right)}\right]^{'}=\frac{u^{'}\left(x\right)∙v\left(x\right)-u\left(x\right)∙v^{'}\left(x\right)}{v^{2}\left(x\right)}$$ |

***Пример1.*** Со примена на горните правила, сега сме во можност без напор да го пресметаме изводот на кој било полином.Користејќи$\left(x^{n}\right)^{'}=nx^{n-1}, n\in N$

Имаме, на пример, за полиномот,

$P(x)=2x^{5}+4x^{4}-3x+2$

$P^{'}(x)=\left(2x^{5}+4x^{4}-3x+2\right)^{'}$

$P^{'}(x)=\left(2x^{5}\right)^{'}+\left(4x^{4}\right)^{'}-\left(3x\right)^{'}+\left(2\right)^{'}$

$P^{'}(x)=2\left(x^{5}\right)^{'}+4\left(x^{4}\right)^{'}-3\left(x\right)^{'}+0$

$P^{'}(x)=2∙5x^{4}+4∙4x^{3}-3∙1$

$P^{'}(x)=10x^{4}+16x^{3}-3$

***Пример2.*** Користејќи ги горните правила и изводите на некои елементарни функции, за изводот на функцијата$y=e^{x}sinx$имаме:

$\left(e^{x}\right)^{'}=e^{x} , \left(sinx\right)^{'}=cosx$

$$y^{'}=\left(e^{x}sinx\right)^{'}=\left(e^{x}\right)^{'}sinx+e^{'}\left(sinx\right)^{'}=e^{x}sinx+e^{x}cos=e^{x}\left(sinx+cosx\right)$$

***Пример3.***Применувајќи го правилото за извод од количник, за извод на функцијата$y=\frac{lnx}{x^{2}}$имаме:

$$y^{'}=\left(\frac{lnx}{x^{2}}\right)^{'}=\frac{\left(lnx\right)^{'}∙x^{2}-lnx∙\left(x^{2}\right)^{'}}{\left(x^{2}\right)^{2}}=\frac{\frac{1}{x}∙x^{2}-lnx∙2x}{x^{4}}=$$

$$=\frac{x-2xlnx}{x^{4}}=\frac{x\left(1-2lnx\right)}{x^{4}}==\frac{1-2lnx}{x^{3}}$$

***Извод од сложена функција***

|  |
| --- |
| Ако функцијата $u$ има извод во фиксна точка $x$ , а функцијата $y=f(u)$ има извод во точката $u=u(x)$ , тогаш и функцијата $f=f\left(u(x)\right)$ има извод во точката $x$ и притоа важи формулата $y^{'}=f^{'}(u)∙u^{'}(x)$ $\left[формулата често се запишува во обликот y\_{x}^{'}=f\_{u}^{'}∙u\_{x}^{'}\right]$ |

***Пример 4.*** Во случај на функцијата $y=e^{sinx}$, ставајќи $u=sinx$ , се добива дека $y^{'}=\left(e^{u}\right)\_{u}^{'}\left(sinx\right)\_{x}^{'}=e^{u}cosx=e^{sinx}cosx$

Слично за функцијата $y=ln\left(3x^{2}-1\right)$ , ставајќи $u=3x^{2}-1$, се добива дека $y^{'}=\left(lnu\right)\_{u}^{'}∙\left(3x^{2}-1\right)\_{x}^{'}=\frac{1}{u}∙6x=\frac{6x}{3x^{2}-1}$

***Пример 5.*** Пресметај го изводот на функцијата $y=x^{x} \left(x>0\right)$

Дадената функција можеме да ја запишеме во облик $y=e^{xlnx}$ , односно $y=e^{u}$ , каде што $u=xlnx$ и добиваме

 $y^{'}=\left(e^{u}\right)\_{x}^{'}=e^{u}\left(xlnx\right)^{'}=e^{xlnx}\left(1∙lnx+x∙\frac{1}{x}\right)=e^{xlnx}\left(lnx+1\right)$

***Извод од инверзна функција***

|  |
| --- |
| Нека за функцијата $y=f(x)$ постои инверзна функција $x=f^{-1}(y)$ во околина на фиксната точка $x\_{0}$. Ако постои извод на функцијата $y=f(x)$ во точката $x\_{0}$ и притоа $f^{'}(x\_{0})\ne 0$ ,тогаш постои и изводот на инверзната функција $x=f^{-1}(y)$ во точката $y\_{0}=f\left(x\_{0}\right)$ и е еднаков на $\frac{1}{f^{-1}(x\_{0})}$ . |

***Пример 6.*** Функцијата $y=log\_{a}x$ е инверзна на функцијата $x=a^{y}$ $\left(каде што 0<a\ne 1 и x>0\right)$.

$y^{'}=\left(log\_{a}x\right)^{'}=\frac{1}{\left(a^{y}\right)^{'}}=\frac{1}{a^{y}lna}=\frac{1}{xlna}$ $\left(0<a\ne 1 ,x>0\right)$

***Пример 7.*** Функцијата $y=arcsinx$ е инверзна на функцијата $x=siny$ , $\left(каде што -\frac{π}{2}\leq y\leq \frac{π}{2} \right)$.

$y^{'}=\left(arcsinx\right)^{'}=\frac{1}{(siny)^{'}}=\frac{1}{cosy}=\frac{1}{\sqrt{1-sin^{2}y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ $\left(-1<x<1\right)$

Во точките $x=-1$ и $x=1$ можеме да зборуваме само за лев, односно десен извод на оваа функција.

***Извод од имплицитно зададена функција***

Нека вредностите на две променливи $x$ и $y$ се сврзани со равенката $F\left(x,y\right)=0$ .

Ако функцијата $y=f(x)$ дефинирана на некој интервал $\left(a,b\right)$ е таква што со замена на $y$ со $f(x)$ во $F\left(x,y\right)=0$ се добива идентитет по $x$ ,велиме дека $y=f(x)$ е имплицитна функција зададена со равенката $F\left(x,y\right)=0$.

***Пример 8.*** Нека е дадена функцијата $x^{2}+y^{2}-a^{2}=0$.

Ако побараме извод на двете страни на равенството по $x$, претпоставувајќи дека $y$ е функција од $x$ , добиваме:

$2x+2yy^{'}=0$

од каде што следува дека

$y^{'}=-\frac{x}{y}$.

***Пример 9.*** Нека е дадена функцијата $x^{6}-y-x^{2}=0$.

Ако побараме извод на двете страни на равенството по $x$, претпоставувајќи дека $y$ е функција од $x$ , добиваме:

$6y^{5}y^{'}-y^{'}-2x=0$

од каде што следува дека

$y^{'}=\frac{2x}{6y^{5}-1}$.

***Извод од параметарски зададена функција***

Нека се дадени равенките

$x=φ\left(t\right) , y=ω(t)$ (1)

каде што $t$ прима вредности во сегментот $\left[T\_{1},T\_{2}\right]$. За секоја вредност на $t$ соодветствуваат вредности $x$ и $y$ . Ако добиените вредности $x$ и $y$ ги интерпретираме како координати на точка во координатната рамнина $xOy$ , тогаш за секоја вредност на $t$ соодвествува точка во рамнината . На тој начин, кога $t$ се менува од $T\_{1}$ до $T\_{2}$ , добиваме крива во рамнината. Равенките (1) се нарекуваат параметарски равенки на таа крива , $t$ се нарекува параметар , а начинот на задавање на кривата се нарекува параметарски начин.

Ако претпоставиме дека функцијата $x=φ(t)$ има инверзна функција , $t=Ф(x)$,тогаш $y$ е функција од $x$ ,односно

$y=ω\left(Ф(x)\right)$ *.* (2)

На тој начин равенките (1) определуваат функција $y$ од $x$ , за која велиме дека е зададена параметарски. Непосредната зависност $y=f(x)$ се добива со елиминација на параметарот $t$ од равенките (1).

Да најдеме извод на функцијата $y$ од $x$ зададена параметарски со равенките (1). Ќе претпоставиме дека функциите $x=φ(t)$ и $y=ω(t)$ имаат извод во секоја внатрешна точка од сегментот $\left[T\_{1},T\_{2}\right]$ , а функцијата $x=φ(t)$ има инверзна функција $t=Ф(x)$ на разгледуваниот сегмент. Тогаш функцијата $y=f(x)$ дефинирана со параметарските равенки (1) може да ја разгледуваме како сложена функција

$$y=ω\left(t\right), t=Ф(x)$$

каде $t$ се менува во сегментот $\left[T\_{1},T\_{2}\right]$. По правилото за извод од сложена функција наоѓаме

$y\_{x}^{'}=y\_{t}^{'}t\_{x}^{'}=ω\_{t}^{'}\left(t\right)Ф\_{x}^{'}(x)$ .

Врз основа на извод на инверзна функција имаме $Ф\_{x}^{'}\left(x\right)=\frac{1}{φ\_{t}^{'}(t)}$.

Со замена на последното равенсто добиваме

$y\_{x}^{'}=\frac{ω\_{t}^{'}(t)}{φ\_{t}^{'}(t)}$ , односно $y\_{x}^{'}=\frac{y\_{t}^{'}}{x\_{t}^{'}}$.

***Пример 10.*** Нека функцијата $y$ од $x$ е зададена со параметарските равенки

$x=acost$

$y=asint$ $0\leq t\leq π$ .

За произволна вредност на параметарот $t$ од дадениот сегмент имаме

$y\_{x}^{'}=\frac{\left(asint\right)^{'}}{\left(acost\right)^{'}}=\frac{acost}{-asint}=-ctgt$ .

***ЗАДАЧИ***

Најди го изводот на функциите,ако:

***1.  ***

**2.  **

**3.  **

**4. **

**5.  **

**6.  **

**7.  **

**8.  **

 **9.  **

**10. **

**11.  **

**12.  **